(2008), 'Για τη δυνατότητα υπερ-υπολογισμού πέρα από την υπόθεση Church-Turing [On the Possibility of Hypercomputing beyond Church-Turing]', in Dimitra Sfendoni-Mentzou (ed.), *Φιλοσοφία τον Επιστιμόν [Philosophy of Science], EFE 2006: Proceedings of the 10th Greek Association for Philosophy Conference* (I; Thessaloniki: Zitis), 407-14. [Presented, Thessaloniki May 6-8, 2006.]

Vincent C. Müller

American College of Thessaloniki

www.typos.de

Για τη δυνατότητα υπολογισμού πέρα από την υπόθεση Church-Turing[1]

Περίληψη

Αυτό το άρθρο εξετάζει κατά πόσο ο υπερ-υπολογισμός οδηγεί υποχρεωτικά σε μιαν αναθεώρηση της υπόθεσης Church-Turing. Συζητάει προτάσεις για υπολογιστικές μηχανές, για τις οποίες λέγεται ότι υπολογίζουν άπειρα βήματα υπολογισμού σε πεπερασμένο χρόνο, εκτελώντας «supertasks». Επιχειρηματολογεί ότι αυτές οι προτάσεις οδηγούν στο εξής δίλημμα: είτε δεν περιγράφονται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν αποτελέσματα, είτε τα αποτελέσματα είναι αντιφατικά. Άρα, ο άπειρος υπερ-υπολογισμός δεν αποτελεί λόγο να απορριφθεί η παραδοσιακή ερμηνεία της υπόθεσης Church-Turing. Η διερεύνηση του υπολογισμού με «supertasks» επίσης υποδεικνύει ότι συγκεκριμένα «supertasks» είναι αδύνατα.

Abstract: On the Possibility of Computing Beyond the Church-Turing Hypothesis

This paper investigates whether hypercomputing forces a revision of the standard reading of the Church-Turing thesis. It discusses proposals for computing machines that are said to compute an infinite number of computing steps in finite time, thus performing supertasks. It argues that these proposals fall into a dilemma: either they cannot be specified such that they have output states, or they compute with contradictory output states. Therefore, infinite hypercomputing is no reason to reject the standard reading of the Church-Turing thesis. The investigation of computing with supertasks also indicates that certain supertasks are impossible.

[1] Ευχαριστώ θερμά για τις γόνιμες συζητήσεις μαζί μου τους Paul Benacerraf, Adam Elga και Θανάση Κεχαγιά.

1. Εισαγωγή: Η υπόθεση Church-Turing και ο υπολογισμός

Για την παραδοσιακή άποψη, αυτό που μπορεί να κάνει ένας υπολογιστής είναι ακριβώς αυτό που μπορεί να υπολογιστεί μέσω αλγόριθμου, δηλαδή με μια διαδικασία που φτάνει με πεπερασμένα μηχανικά βήματα σε αποτέλεσμα (αυτό ονομάζεται και «αποτελεσματικά υπολογίσιμο» [effectively computable]). Αυτή η παραδοσιακή άποψη εκφράζεται στην *Υπόθεση Church-Turing*: Όλες οι αποτελεσματικά υπολογίσιμες συναρτήσεις υπολογίζονται από ένα μηχάνημα Turing. Η υπόθεση αυτή είναι στην πραγματικότητα συνδυασμός δύο υποθέσεων: της *Υπόθεσης Church*, ότι όλες οι αποτελεσματικά υπολογίσιμες συναρτήσεις είναι αναδρομικές, και της *Υπόθεσης Turing*, ότι όλες οι αποτελεσματικά υπολογίσιμες συναρτήσεις υπολογίζονται από ένα μηχάνημα Turing.[2] (Είναι σημαντικό να θυμάται κανείς ότι η Υπόθεση Church-Turing αφορά μόνο ψηφιακούς υπολογισμούς.)

Τα τελευταία χρόνια, λοιπόν, εμφανίζονται όλο και περισότερες απόψεις που θεωρούν ότι η υπόθεση Church-Turing αφορά μόνο σε ότι υπολογίζεται αποτελεσματικά από άνθρωπο και ότι δεν έχει γενική ισχύ. Ειδικά ο Jack Copeland τονίζει χαρακτηριστικά ότι η υπόθεση Church-Turing για μηχανήματα είναι λανθασμένη: “known to be false”.[3]

1.1. Υπερ-υπολογισμός

Κίνητρο γι’ αυτές τις απόψεις είναι η ελπίδα ότι ο υπερ-υπολογισμός (hypercomputing), δηλαδή ο υπολογισμός πραγμάτων που κανένα μηχάνημα-Turing δεν μπορεί να υπολογίσει, είναι δυνατός. Μερικά προτεινόμενα σχέδια είναι τα ακόλουθα:

---

2 Alonzo Church, “An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory”, *American Journal of Mathematics* 58 (1936): 345-363. George S. Boolos., John P. Burgess και Richard C. Jeffrey, *Computability and Logic*, 4 έκδ. (Cambridge: Cambridge University Press, 2003). Alan Turing, “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”, *Proceedings of the London Mathematical Society* 2/42 (1936/1937): 230-256. Για το μηχάνημα Turing, βλέπε, για παράδειγμα, Luciano Floridi, *Philosophy and Computing: An Introduction* (London: Routledge, 1999), 26 και μετά. Martin Davis, *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing* (New York: W. W. Norton, 2000), κ. 7.

3 Jack B. Copeland, “Narrow Versus Wide Mechanism, Including a Re-Examination of Turing’s Views on the Mind–Machine Issue”. *Journal of Philosophy* 97/1 (2000), 15; βλ. και 31. Βλέπε ενδεικτικά και του αυτού: “Hypercomputation”, *Minds and Machines* 12 (2002): 461–502. Του αυτού “Computation”, επιμ. έκδ. Luciano Floridi: *Blackwell Companion to the Philosophy of Computing*. (Oxford: Blackwell 2004), 3-17. P.D. Welch, “On the Possibility, or Otherwise, of Hypercomputation”, *British Journal for the Philosophy of Science* 55 (2004): 739-746.

- Τα «O-machines» του Turing («μαντικά μηχανήματα» μ’ ένα μαύρο κουτί, το οποίο απαντάει με μη-μηχανικό τρόπο σε μη-υπολογίσιμα ερωτήματα),
- Τα «Μηχανήματα του Ζήνωνα» (που μπορούν να υπολογίσουν άπειρα βήματα, βλέπε παρακάτω),
- Αναλογικοί υπολογιστές (αλλά βλέπε παραπάνω),
- Κουαντικοί υπολογιστές,
- Μηχανήματα Putnam-Gold (υπολογιστές που μπορούν ν’ «αλλάζουν γνώμη»),
- Πιθανοτικά μηχανήματα,
- Μηχανήματα σε Malament-Hogarth σύμπαντα ή σε “mixmaster” σύμπαντα, ...κλπ.[4]

Οι παραπάνω προτάσεις υποδεικνύουν δυο διαφορετικά προβλήματα:

Πρόβλημα 1: Είναι δυνατός ο υπερ-υπολογισμός σ’ αυτόν τον κόσμο; Αυτή η άποψη ονομάζεται “Φυσική υπόθεση Church-Turing” ή, αλλιώς, “υπόθεση Gandy”.[5] Γι’ αυτήν την υπόθεση υπάρχουν πολλές ενδείξεις ότι είναι προβληματική: Για τις προτάσεις αυτές απαιτούνται άπειρη μνήμη, ή άπειρα μεγάλες μηχανές, άπειρα βήματα, απειροελάχιστα μέρη, άπειρη ταχύτητα, απείρως ταχεία μεταφορά πληροφοριών, απείρως ακριβή μέτρηση, κλπ.

Πρόβλημα 2: Είναι δυνατός ο υπερ-υπολογισμός σε κάποιο δυνατό κόσμο; Για να απαντηθεί αυτό το πρόβλημα, θα προτείνω ένα γενικό επιχείρημα που θα μετατόπιζε το βάρος της απόδειξης στους υποστηρικτές του υπερ-υπολογισμού.

---

[4] Βλέπε Joel David Hamkins, and Andy Lewis “Infinite Time Turing Machines”, *The Journal of Symbolic Logic* 65/2 (2000): 567-604. Tien D Kieu,. “Quantum Hypercomputability”, *Minds and Machines* 12 (2002): 541-561.

[5] Robin Gandy, “Church’s Thesis and Principles of Mechanics”, επιμ. έκδ. J. Barwise, H. J. Keisler και K. Kunen: *The Kleene Symposium* (Amsterdam: North Holland, 1980). Paolo Cotogno, “Hypercomputation and the Physical Church-Turing Thesis”, *British Journal for the Philosophy of Science* 54/2 (2003): 181-223. Βλέπε και Oron Shagrir, και Itamar Pitowsky “Physical Hypercomputation and the Church–Turing Thesis”, *Minds and Machines* 13/1 (2003): 87-101.

2. Μηχανήματα του Ζήνωνα: Άπειροι υπερ-υπολογισμοί

Η πιο εξελιγμένη πρόταση για υπερ-υπολογιστή[6] είναι το "Μηχάνημα του Ζήνωνα" (ή, αλλιώς, η "μηχανή Turing που επιταχύνει"): Στο μηχάνημα αυτό το κάθε βήμα υπολογισμού διαρκεί ένα κλάσμα του χρόνου από το προηγούμενο, π.χ.: 1/2, 1/4, 1/8, …

Ένα τέτοιο μηχάνημα θα μπορούσε να κάνει άπειρα υπολογιστικά βήματα σε πεπερασμένο χρόνο (π.χ. σ' ένα δευτερόλεπτο). Το μηχάνημα δεν σταματάει μετά από το αποτέλεσμα, αλλά «τελειώνει» σε κάποιο σημείο στο χρόνο. Κατά συνέπεια δεν είναι μηχάνημα του Turing.

Για τα μηχανήματα αυτά που εκτελούν «supertasks», δηλαδή άπειρες ενέργειες σε πεπερασμένο χρόνο, γνωρίζουμε κάποια από τα προβλήματά τους. Ας θυμηθούμε τη «λάμπα του Thomson»: Μια λάμπα που κάποιος την αναβοσβήνει άπειρες φορές σε πεπερασμένο χρόνο. Στο τέλος η λάμπα δεν μπορεί να είναι ούτε αναμμένη, ούτε σβησμένη. Αυτό όμως θεωρείται ότι είναι αντίφαση.[7]

Ο Benacerraf συμφωνεί με την περιγραφή αυτή, όμως, τονίζει ότι τίποτα δεν έπεται λογικά για την κατάσταση της λάμπας μετά απ' αυτήν τη σειρά αναβοσβησιμάτων:[8] αυτό το ονομάζω το «χάσμα Benacerraf». Φαίνεται ότι, για να παραχθεί ένα αποτέλεσμα, άπειροι υπερ-υπολογισμοί πρέπει να γεφυρώσουν το χάσμα Benacerraf.

Το πρόβλημα μας, λοιπόν, είναι το ακόλουθο: Δεν υπάρχει αποτέλεσμα μετά από το τελευταίο βήμα (που δεν υπάρχει) – αλλά ούτε μπορούμε να δούμε το αποτέλεσμα μετά το τέλος της σειράς, αφού «τίποτα δεν έπεται» (Benacerraf). Αυτό αποτελεί ένα δίλημμα για τον υπερ-υπολογισμό.

2.1. Μια πρόταση: Να μη γεφυρωθεί το χάσμα του Benacerraf

Ίσως μπορούμε να αποφύγουμε το πρόβλημα με τον ακόλουθο τρόπο μετατροπής του μηχανήματος. Ας πούμε ότι θέλουμε να μάθουμε αν υπάρχει το "777" κάπου στην άπειρη επέκταση του αριθμου π. Εξοπλίζουμε το μηχάνημα του Ζήνωνα με μια λάμπα, η οποία ανάβει μόλις βρίσκει το "777" στο π. Μας λέει, λοιπόν, η περιγραφή της μηχανής ποια

---

6 Petrus H. Potgieter, "Zeno Machines and Hypercomputation", *Theoretical Computer Science*; 358/1 (2006): 23-33. Toby Ord, and Tien D. Kieu "The Diagonal Method and Hypercomputation", *British Journal for the Philosophy of Science* 56/1 (2005): 147-156.

7 James F. Thomson, "Tasks and Super-tasks", *Analysis* 15 (1954): 1-13.

είναι η κατάσταση της λάμπας μετά από τη σειρά υπολογισμών; Όχι, επειδή δεν υπάρχει λόγος να θεωρούμε την κατάσταση της λάμπας ως αποτέλεσμα του μηχανήματος. Όμως, αν δεν έπεται τίποτα (αν δεν γεφυρώσουμε το χάσμα του Benacerraf), τότε δεν υπάρχει αποτέλεσμα. Όπως έλεγε ο ίδιος ο Copeland: "The answer to the Thomsonian question 'Where is the scanner [of the Turing machine] at that point?' is: Nowhere."[9]

2.2. Δεύτερη πρόταση: Γεφυρώνοντας το χάσμα Benacerraf

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι βρήκαμε μια περιγραφή που γεφυρώνει το χάσμα. Αλλά σ' αυτήν την περίπτωση θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε αδύνατα πράγματα! Να εξηγήσω:

1) Ένα μηχάνημα του Ζήνωνα μπορεί να υπολογίσει άπειρα βήματα σε πεπερασμένο χρόνο (υπόθεση)

2) Υπάρχει πρόγραμμα (P) που

   α) Υπολογίζει τα ψηφία του *π* ένα-ένα, και

   β) γράφει κάθε υπολογισμένο ψηφίο σε μια μεταβλητή (N), και

   γ) (N) αλλάζει αν, και μόνον αν, το αλλάζει το (P) (υπόθεση)

3) Ένα μηχάνημα του Ζήνωνα μπορεί να τρέχει (P) (υπόθεση)

4) Αφού έχει τρέξει (P) στο μηχάνημα, η μεταβλητή (N) περιέχει ένα ψηφίο του *π* (από 2 και 3)

Μέχρι εδώ καλά. Αλλά ποιό είναι αυτό το ψηφίο; Μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

5) Αυτό το ψηφίο στο (N) είναι το τελευταίο ψηφίο που υπολογίστηκε

   ή

   Αυτό το ψηφίο στο (N) δεν είναι το τελευταίο ψηφίο που υπολογίστηκε

Αλλά και οι δυο πιθανότητες είναι λανθασμένες,

6) Αν αυτό το ψηφίο στο (N) είναι το τελευταίο ψηφίο που υπολογίστηκε, τότε είναι το τελευταίο ψηφίο του *π* (από 1, 2 και 4)

7) Αν αυτό το ψηφίο στο (N) δεν είναι το τελευταίο ψηφίο που υπολογίστηκε, τότε ή υπάρχει επιπλέον ψηφίο ή δεν υπάρχει τελευταίο ψηφίο. Και στις δύο περιπτώσεις το ψηφίο στο (N) δεν είναι το αποτέλεσμα του (P) (από 1, 2 και 4)

---

[8] Paul Benacerraf, "Tasks, Supertasks, and the Modern Eleatics", *Journal of Philosophy* LIX/24 (1962): 779.

[9] Jack Copeland, "Accelerating Turing Machines", *Minds and Machines* 12 (2002): 289.

8) Το ψηφίο στο (N) είναι είτε το τελευταίο ψηφίο του *π,* είτε δεν είναι το αποτέλεσμα του (P) (από 6 και 7)

9) Δεν υπάρχει τελευταίο ψηφίο του π (υπόθεση)

10) Το ψηφίο στο (N) δεν είναι το αποτέλεσμα του (P) (από 8 και 9)

Το 10 είναι αντιφατικό του 4. Το μηχάνημα είναι αντιφατικό με τις προδιαγραφές που δώσαμε.

3. Η διάγνωση: γεφυρωμένα supertasks

Το επιχείρημα αυτό δείχνει τι μπορεί να κάνει ένα ψηφιακό υπολογιστικό μηχάνημα με αποτέλεσμα, αλλά δεν δείχνει τίποτα για τα μαθηματικά του άπειρου (ή γι αυτό που θα μπορούσε να υπολογίσει ένας θεός).[10] Ένα υπερ-υπολογιστικό μηχάνημα του Ζήνωνα κάνει ένα γεφυρωμένο supertask: το supertask έχει ένα αιτιατό που διαρκεί πέρα από το χρόνο εκπλήρωσης του έργου (το αποτέλεσμα). Το γεφύρωμα επιτρέπει την παραπάνω αντίφαση.

Το βάρος της απόδειξης, λοιπόν, πέφτει πλέον στους υποστηρικτές του υπερ-υπολογισμού. Υπάρχει διέξοδος; Τι είναι αυτό που επιτρέπει τα μηχανήματα τύπου «777», αλλά ταυτοχρόνως αποτρέπει τα αδύνατα μηχανήματα; Ίσως ο ίδιος ο δείκτης (λάμπα, (N)) εκτελεί ένα supertask στα αδύνατα μηχανήματα; Πιστεύω, όμως, ότι δε θα βρεθεί περιγραφή τέτοιων μηχανημάτων που δεν θα οδηγεί σε αντίφαση.

4. Συμπέρασμα: Υπολογίζοντας το μη-υπολογίσιμο μέσω γεφυρωμένων supertasks

Συμπεραίνω, λοιπόν, ότι ο Thomson είχε δίκιο σ’ ένα πράγμα: *Αν* κάτι έπεται από καταστάσεις μέσα στη σειρά για καταστάσεις μετά από τη σειρά (δοθείσης μιας γεφυρωματικής αρχής), τότε επακολουθεί αντίφαση. Επίσης ο Benacerraf είχε δίκιο ότι τίποτα δεν έπεται από καταστάσεις μέσα στη σειρά για καταστάσεις μετά από τη σειρά – εκτός εάν προστεθεί μια γεφυρωματική αρχή.

Εχουμε, λοιπόν, ένα δίλημμα: Το μηχάνημα του Ζήνωνα είτε περιγράφεται και γεφυρώνει το χάσμα, είτε δεν περιγράφεται. Όμως, στην πρώτη περίπτωση η περιγραφή του μηχανήματος εμπεριέχει αντιφάσεις και στη δεύτερη το μηχάνημα δεν γεφυρώνει το

---

[10] Γι’ αυτό το πρόβλημα, βλέπε Oron Shagrir, “Supertasks, Accelerating Turing Machines and Un-computability”, *Theoretical Computer Science* 317 (2004): 110.

χάσμα και, άρα, δεν υπολογίζει αποτέλεσμα. Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις τα μηχανήματα του Ζήνωνα υπερ-υπολογιστές είναι αδύνατα – όπως είναι μάλλον όλα τα γεφυρωμένα supertasks.

Κατά συνέπεια, η έννοια του άπειρου υπερ-υπολογισμού δεν αποτελεί λόγο να απορρίψουμε την παραδοσιακή ερμηνεία, σύμφωνα με την οποία η υπόθεση Church-Turing καθορίζει τι είναι υπολογισμός.

Βιβλιογραφία

Benacerraf, Paul "Tasks, Supertasks, and the Modern Eleatics". *Journal of Philosophy* LIX/24 (1962): 765-784.

Boolos, George S., John P. Burgess και Richard C. Jeffrey. *Computability and Logic*, 4 έκδ. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

Church, Alonzo "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory". *American Journal of Mathematics* 58 (1936): 345-363.

Copeland, Jack B. "Narrow Versus Wide Mechanism, Including a Re-Examination of Turing's Views on the Mind–Machine Issue". *Journal of Philosophy* 97/1 (2000): 5–32.

— "Accelerating Turing Machines". *Minds and Machines* 12 (2002): 281–301.

— "Hypercomputation". *Minds and Machines* 12 (2002): 461–502.

— "Computation". Στο *Blackwell Companion to the Philosophy of Computing*, επιμ. έκδ. Luciano Floridi: Oxford: Blackwell, 3-17, 2004.

Cotogno, Paolo "Hypercomputation and the Physical Church-Turing Thesis". *British Journal for the Philosophy of Science* 54/2 (2003): 181-223.

Davis, Martin. *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing.* New York: W. W. Norton, 2000.

Floridi, Luciano. *Philosophy and Computing: An Introduction.* London: Routledge, 1999.

Gandy, Robin "Church's Thesis and Principles of Mechanics". Στο *The Kleene Symposium*, επιμ. έκδ. J. Barwise, H. J. Keisler και K. Kunen:. Amsterdam: North Holland, 1980.

Hamkins, Joel David and Andy Lewis "Infinite Time Turing Machines". *The Journal of Symbolic Logic* 65/2 (2000): 567-604.

Kieu, Tien D. "Quantum Hypercomputability". *Minds and Machines* 12 (2002): 541-561.

Ord, Toby και Tien D. Kieu "The Diagonal Method and Hypercomputation". *British Journal for the Philosophy of Science* 56/1 (2005): 147-156.

Potgieter, Petrus H. "Zeno Machines and Hypercomputation". *Theoretical Computer Science*; 358/1 (2006): 23-33.

Shagrir, Oron "Supertasks, Accelerating Turing Machines and Uncomputability". *Theoretical Computer Science* 317 (2004): 105– 114.

Shagrir, Oron και Itamar Pitowsky "Physical Hypercomputation and the Church–Turing Thesis". *Minds and Machines* 13/1 (2003): 87-101.

Thomson, James F. "Tasks and Super-tasks". *Analysis* 15 (1954): 1-13.

Turing, Alan "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem". *Proceedings of the London Mathematical Society* 2/42 (1936/1937): 230-256.

Welch, P.D. "On the Possibility, or Otherwise, of Hypercomputation". *British Journal for the Philosophy of Science* 55 (2004): 739-746.